Beispiel zum Verfahren von Katok et al.

Betrachten wir als Beispiel die in Bild D.14 dargestellte generelle Erzeugnisstruktur.

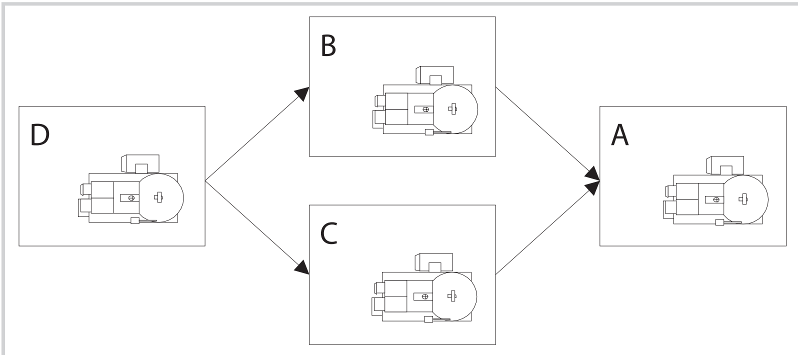

Bild D.14: Erzeugnis- und Prozeßstruktur

Für das Endprodukt A liegen für die nächsten 4 Perioden geplante Primärbedarfsmengen in Höhe von 10, 5, 30 und 20 ME vor. Das Endprodukt A wird aus zwei Komponenten B und C hergestellt, die ihrerseits wiederum auf einem gemeinsamen Ausgangsmaterial D basieren. Dabei wird jedes durch ein Rechteck dargestellte Produkt in einem Arbeitsgang bearbeitet. Der Einfachheit halber gehen wir davon aus, daß alle Arbeitsgänge auf derselben Ressource stattfinden, und daß alle Direktbedarfskoeffizienten und Stückbearbeitungszeiten gleich 1 sind. Die Rüstzeiten sind einheitlich gleich 10. Außerdem sei angenommen, daß die marginalen Lagerkosten pro ZE und ME für das Erzeugnis A, B, C und D 1.8, 0.1, 0.1 bzw. 1.0 GE und die Rüstkosten jeweils 20 GE betragen. Die Kapazität der Ressource möge in allen Perioden einheitlich 130 ZE betragen.

Setzt man zur Bestimmung der optimalen Lösung das Modell MLCLSP sowie das Standardprogramm CPLEX ein, dann erhält man den in Tabelle D.1 angegebenen optimalen Produktionsplan, dessen Zielfunktionswert 318.5 beträgt.

$k\backslash t$	1	2	3	4
A	15	–	30	20
B	15	30	–	20
C	15	–	35	15
D	30	30	35	35
Kapazitätsbedarf	115	80	130	130

Tabelle D.1: Optimaler Produktionsplan

Nach dem Vorschlag von *Katok, Lewis und Harrison* wird nun wie folgt vorgegangen:

Iteration 0:

Das Modell LPR_0 enthält insgesamt 32 Variablen (16 Losgrößenvariablen und 16 Lagerbestandsvariablen) (Menge $\mathcal{V}_x$) sowie 4 Kapazitätsrestriktionen (Menge $\mathcal{NB}^{(1)}$) und 16 Lagerbilanzgleichungen (Menge $\mathcal{NB}^{(2)}$). Die optimale Lösung des Modells LPR_0 zeigt Tabelle D.2.

$k \backslash t$	1	2	3	4
A	10	5	30	20
B	10	15	20	20
C	10	5	30	20
D	20	20	50	40
Kapazitätsbedarf (approx.)	50	45	130	100

Tabelle D.2: Optimaler Produktionsplan nach Lösung von LPR_0

Da für das Modell LPR_0 sämtliche Rüstvariablen auf 0 gesetzt und bei der Bestimmung der modifizierten Koeffizienten vernachlässigt wurden, ist der in der letzten Zeile der Tabelle D.2 angegebene Kapazitätsbedarf nur eine sehr schlechte Approximation des tatsächlichen Kapazitätsbedarfs. Der ermittelte Produktionsplan sieht vor, daß in jeder Periode jedes Produkt produziert wird. Daher werden zur Berechnung der Rüstkosten alle Rüstvariablen auf 1 gesetzt. Die mit dieser Lösung verbundenen Rüstkosten betragen damit $S_0 = 16 \cdot 20 = 320$. Die Kapazität reicht (auch bei Vernachlässigung der Rüstzeiten) nicht aus, um den gesamten Bedarf der Periode 3 zu produzieren. Es kommt folglich zu einer Produktion auf Lager. Für die Lagerung in Periode 2 entstehen Lagerkosten in Höhe von $H_0 = 10 \cdot 1 + 10 \cdot 0.1 = 11$. Daraus ergibt sich $\epsilon_0 = \frac{309}{331} = 0.933535$.

Iteration 1:

Jetzt werden alle **Koeffizienten** der Zielfunktion und der Nebenbedingungen modifiziert. Zur Erfassung der Anzahl der Modifikationen führen wir Modifikationszähler m_j^c ($j \in \mathcal{V}_x$) für die Zielfunktionskoeffizienten sowie m_j^a ($j \in \mathcal{V}_x$) für die Koeffizienten der Nebenbedingungen ein und setzen diese zu Beginn des Verfahrens gleich Null. Damit ergibt sich jeweils $(1 - \epsilon_0)^0 = (1 + \epsilon_0)^0 = 1$. Zu Beginn des Verfahrens hat ϵ also noch keine Auswirkungen.

Tabelle D.3 zeigt die Berechnungen zur Modifikation der Modellkoeffizienten der Losgrößenvariablen. Für die Zielfunktionskoeffizienten der Lagerbestandsvariablen ergibt sich keine Veränderung, da alle Modifikationszähler gleich 0 sind. Trotzdem werden auch die Modifikationszähler dieser Variablen auf 1 erhöht.

Gegenüber den Startwerten haben sich die Koeffizienten nun beträchtlich vergrößert. Die optimale Lösung des Modells LPR_1 ist in Tabelle D.4 wiedergegeben. Ermittelt man die Kapazitätsbelastung mit Hilfe der modifizierten Koeffizienten, dann schöpft diese Lösung die verfügbare Kapazität in den Perioden 3 und 4 voll aus. Dies ist in Tabelle D.4 in der Zeile „Kapazitätsbedarf (approx.)“ angegeben. Bei Berechnung der tatsächlichen Bearbeitungs- und Rüstzeiten mit Hilfe der unmodifizierten Koeffizienten zeigt sich, daß die real verfügbare Kapazität überschritten wird. Diese Lösung ist im Hinblick auf das Modell MIP also noch **nicht zulässig**.

Losgröße x_j^{*0}	Koeffizient	alt	neuer Wert	Koeffizient	alt	neuer Wert
10	$a_{11}^{(1)}$	1	$1+\frac{10}{10}=2$	$c_1^{(1)}$	0	$0+\frac{20}{10}=2$
5	$a_{12}^{(1)}$	1	$1+\frac{10}{5}=3$	$c_2^{(1)}$	0	$0+\frac{20}{5}=4$
30	$a_{13}^{(1)}$	1	$1+\frac{10}{30}=1.333$	$c_3^{(1)}$	0	$0+\frac{20}{30}=0.667$
20	$a_{14}^{(1)}$	1	$1+\frac{10}{20}=1.5$	$c_4^{(1)}$	0	$0+\frac{20}{20}=1$
10	$a_{25}^{(1)}$	1	$1+\frac{10}{10}=2$	$c_5^{(1)}$	0	$0+\frac{20}{10}=2$
15	$a_{26}^{(1)}$	1	$1+\frac{10}{15}=1.667$	$c_6^{(1)}$	0	$0+\frac{20}{15}=1.333$
20	$a_{27}^{(1)}$	1	$1+\frac{10}{20}=1.5$	$c_7^{(1)}$	0	$0+\frac{20}{20}=1$
20	$a_{28}^{(1)}$	1	$1+\frac{10}{20}=1.5$	$c_8^{(1)}$	0	$0+\frac{20}{20}=1$
10	$a_{29}^{(1)}$	1	$1+\frac{10}{10}=2$	$c_9^{(1)}$	0	$0+\frac{20}{10}=2$
5	$a_{2,10}^{(1)}$	1	$1+\frac{10}{5}=3$	$c_{10}^{(1)}$	0	$0+\frac{20}{5}=4$
30	$a_{2,11}^{(1)}$	1	$1+\frac{10}{30}=1.333$	$c_{11}^{(1)}$	0	$0+\frac{20}{30}=0.667$
20	$a_{2,12}^{(1)}$	1	$1+\frac{10}{20}=1.5$	$c_{12}^{(1)}$	0	$0+\frac{20}{20}=1$
20	$a_{2,13}^{(1)}$	1	$1+\frac{10}{20}=1.5$	$c_{13}^{(1)}$	0	$0+\frac{20}{20}=1$
20	$a_{2,14}^{(1)}$	1	$1+\frac{10}{20}=1.5$	$c_{14}^{(1)}$	0	$0+\frac{20}{20}=1$
50	$a_{2,14}^{(1)}$	1	$1+\frac{10}{50}=1.2$	$c_{15}^{(1)}$	0	$0+\frac{20}{50}=0.4$
40	$a_{2,16}^{(1)}$	1	$1+\frac{10}{40}=1.25$	$c_{16}^{(1)}$	0	$0+\frac{20}{40}=0.5$

Tabelle D.3: Modifikation der Koeffizienten für Modell LPR_1

$k \backslash t$	1	2	3	4
A	10	5	30	20
B	10	33.227	1.773	20
C	15	0	33.636	16.364
D	25	33.227	35.409	36.364
Kapazitätsbedarf (approx.)	108	120	130	130
Produktionszeit (real)	60	71.453	100.819	92.727
Rüstzeit (real)	40	30	40	40
Kapazitätsbedarf (real)	100	101.453	$\boxed{140.819}$	$\boxed{132.727}$

Tabelle D.4: Optimaler Produktionsplan nach Lösung von LPR_1

Da in der letzten Iteration Veränderungen der Koeffizienten vorgenommen worden sind und die (extern vorgegebene) maximale Anzahl von Iterationen $\ell_{\max} = 10$ noch nicht erreicht ist, wird eine weitere Iteration durchgeführt.

Iteration 2:

Eine Koeffizientenanpassung für die Variable x_j wird nach dem Vorschlag von *Katok, Lewis und Harrison* nur dann vorgenommen, wenn der betreffende Restriktionskoeffizient noch nicht (Modifikationszähler $m_j^a < 1$) und der Koeffizient der Zielfunktion erst einmal (Modifikationszähler $m_j^c < 2$) modifiziert worden ist. Da alle Restriktionenkoeffizienten der Losgrößenvariablen ($j = 1, ..., 16$) bereits in der letzten Iteration modifiziert wurden, werden nun nur noch die Zielfunktionskoeffizienten der Lagerbestandsvariablen ($j = 17, ..., 32$) modifiziert, wobei bei diesen Variablen lediglich das Ziel der Identität von Rüstkosten und Lagerkosten zum Tragen kommt. Die Auswertung der letzten Lösung mit den unmodifizierten Kostensätzen ergibt $S_1 = 300$ und $H_1 = 40.5494$. Daraus ergibt sich $\epsilon_1 = 0.761859$. Die neuen **Zielfunktionskoeffizienten der Lagerbestandsvariablen** zeigt Tabelle D.5.

Lösen wir nun das resultierende Modell LPR_2, dann stellen wir fest, daß die optimale Lösung dieses Modells sich gegenüber der Iteration 1 (Modell LPR_1) nicht verändert hat. Daher können die **Iterationen beendet** werden.

Als nächstes wird **Zulässigkeit** der gefundenen Lösung überprüft.

Koeffizient	alter Wert	neuer Wert
$c_{17}^{(1)}$	4	$4 \cdot (1+0.761859)^1 = 7.04744$
$c_{18}^{(1)}$	4	$4 \cdot (1+0.761859)^1 = 7.04744$
$c_{19}^{(1)}$	4	$4 \cdot (1+0.761859)^1 = 7.04744$
$c_{20}^{(1)}$	4	$4 \cdot (1+0.761859)^1 = 7.04744$
$c_{21}^{(1)}$	1.1	$1.1 \cdot (1+0.761859)^1 = 1.93804$
$c_{22}^{(1)}$	1.1	$1.1 \cdot (1+0.761859)^1 = 1.93804$
$c_{23}^{(1)}$	1.1	$1.1 \cdot (1+0.761859)^1 = 1.93804$
$c_{24}^{(1)}$	1.1	$1.1 \cdot (1+0.761859)^1 = 1.93804$
$c_{25}^{(1)}$	1.1	$1.1 \cdot (1+0.761859)^1 = 1.93804$
$c_{26}^{(1)}$	1.1	$1.1 \cdot (1+0.761859)^1 = 1.93804$
$c_{27}^{(1)}$	1.1	$1.1 \cdot (1+0.761859)^1 = 1.93804$
$c_{28}^{(1)}$	1.1	$1.1 \cdot (1+0.761859)^1 = 1.93804$
$c_{29}^{(1)}$	1	$1 \cdot (1+0.761859)^1 = 1.761859$
$c_{30}^{(1)}$	1	$1 \cdot (1+0.761859)^1 = 1.761859$
$c_{31}^{(1)}$	1	$1 \cdot (1+0.761859)^1 = 1.761859$
$c_{32}^{(1)}$	1	$1 \cdot (1+0.761859)^1 = 1.761859$

Tabelle D.5: Modifikation der Zielfunktionskoeffizienten der Lagerbestandsvariablen für Modell LPR_2

Zur formalen Überprüfung der Zulässigkeit der Lösung des Modells LPR_ℓ wird auf das Modell $LPR(\underline{\widehat{\gamma}})_{\text{neu}}$[89] zurückgegriffen. Die durch Rüstvorgänge benötigten Kapazitäten werden von der rechten Seite abgezogen. Die so veränderten Periodenkapazitäten betragen dann $\widetilde{b}_1^{(1)} = 130 - 4 \cdot 10 = 90$, $\widetilde{b}_2^{(1)} = 130 - 3 \cdot 10 = 100$, $\widetilde{b}_3^{(1)} = 130 - 4 \cdot 10 = 90$ und $\widetilde{b}_4^{(1)} = 130 - 4 \cdot 10 = 90$. Man setzt nun die unmodifizierten Restriktionenkoeffizienten wieder ein und setzt für diejenigen Losgrößenvariablen, die in der aktuellen Lösung Null waren, die Obergrenze 0 fest. Im Beispiel muß nur für eine Losgrößenvariable eine derartige Obergrenze gesetzt werden: $x_{10} = 0$ (Produkt C in Periode 2). Die Lösung des Modells $LPR(\underline{\widehat{\gamma}})$ ist in Tabelle D.6 wiedergegeben. Diese Lösung ist **nicht zulässig**, da die für die Bearbeitung der Lose benötigte Kapazität in Periode 4 (100) die verfügbare Netto-Kapazität ($\widetilde{b}_4^{(1)} = 90$) übersteigt.

89 siehe S. 244

$k\backslash t$	1	2	3	4
A	10	5	30	20
B	10	35	0	20
C	15	0	30	20
D	25	35	30	40
Kapazitätsbedarf	60	75	90	$\boxed{100}$
rechte Seite $\widetilde{b}$	90	100	90	90

Tabelle D.6: Optimaler Produktionsplan nach Abschluß der Koeffizientenanpassung

Während *Katok, Lewis und Harrison* die genannten Verbesserungsverfahren nur dann einsetzen, wenn im ersten Schritt (CMSB) eine zulässige Lösung gefunden wurde, spricht natürlich nichts gegen den Versuch, eine kapazitätsmäßig unzulässige Lösung durch die **Einsparung von Rüstzeit** (Simple Setup Reduction, SSR) zulässig zu machen. Dies soll mit den obigen unzulässigen Lösung versucht werden. Geht man von der in Tabelle D.6 angegebenen nicht-zulässigen Lösung aus, dann kann man (bei Verwendung der in den Tabellen D.3 und D.5 angegebenen modifizierten Koeffizienten) durch die Fixierung von $x_6 = 0$ eine zulässige Lösung mit dem Zielfunktionswert 358.51 und alternativ durch Fixierung von $x_{15} = 0$ eine zulässige Lösung mit dem Zielfunktionswert 353.14 erhalten. Der letztgenannte Plan ist in Tabelle D.7 wiedergegeben.

$k\backslash t$	1	2	3	4
A	10	5	30	20
B	10	5	30	20
C	15	0	33.636	16.364
D	25	68.636	$\boxed{0}$	36.364

Tabelle D.7: Produktionsplan nach Fixierung von $x_{15} = 0$

Löst man nun das Modell LPR$(\widehat{\gamma})_{\text{neu}}$ mit der angepaßten rechten Seite $\widetilde{b}$ und den unmodifizierten Koeffizienten, dann erhält man die in D.8 angegebene zulässige Lösung des Beispiels.

$k\backslash t$	1	2	3	4
A	10	5	30	20
B	10	5	30	20
C	15	0	35	15
D	25	70	0	35
Kapazitätsbedarf	100	110	125	130

Tabelle D.8: Optimaler Produktionsplan nach Anwendung der SSR-Heuristik

Dieser Produktionsplan ist mit Kosten in Höhe von 356 GE verbunden. Wendet man schließlich den dritten Verfahrensschritt an, dann kommt man zu der in Tabelle D.9 angegebenen Lösung, deren Kosten mit 324 GE nur geringfügig über den minimalen Kosten von 318.5 GE liegen.

$k \backslash t$	1	2	3	4
A	10	5	30	20
B	10	35	0	20
C	15	0	35	15
D	25	35	35	35
Kapazitätsbedarf	60	75	100	90

Tabelle D.9: Optimaler Produktionsplan nach Abschluß des Verfahrens